Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie:

Dla ustalonego $R>0$ rozważmy dwie drogi: odcinek $[-R,R]$ oraz łuk $\gamma_R = \{R\cdot\exp(it)\colon t\in[0,\pi]\}$. Rozważmy również cykl $\Gamma_R = [-R.R]+\gamma_R$.

Zauważmy, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\operatorname{Re}\int_{[-R,R]} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz.$$

Całkę $\int_{\Gamma_R}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz$ liczymy z twierdzenia o residuach. Funkcja podcałkowa ma dwa bieguny $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Mamy

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(z_2)=0,\quad \operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(z_1)=1,\ \text{dla } R>|z_1|.$$

Zatem

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}, z_1\right).$$

Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}, z_1\right) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{\exp(iz)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{\exp(iz_1)}{z_1-z_2} = \frac{\exp\left(\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)}{i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\exp(\sqrt{3}/2)\left(\cos(1/2)-i\sin(1/2)\right)}{i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\exp(\sqrt{3}/2)\left(\sin(1/2)-i\cos(1/2)\right)\end{aligned}$$

Czyli dla $R>|z_1|$ mamy

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\exp(\sqrt{3}/2)\left(\cos(1/2)+i\sin(1/2)\right).$$

Oszacujmy teraz całkę $\int_{\gamma_R}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz$. Mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi}\frac{\exp(iRe^{it})\cdot R\cdot i\cdot e^{it}}{1+Re^{it}+R^2e^{2it}}\,dt\right| \leqslant \\ &\leqslant R\cdot\int_0^{\pi}\frac{\left|\exp(iRe^{it})\cdot t\right|}{|1+Re^{it}+R^2e^{2it}|} = R\cdot\int_0^{\pi}\frac{\exp(-R\sin(t))\cdot|t|}{|1+Re^{it}+R^2e^{2it}|}\,dt \leqslant \\ &\leqslant R\cdot\exp(-R)\cdot\pi\int_0^{\pi}\frac{dt}{|1+Re^{it}+R^2e^{2it}|}\end{aligned}$$

Oszacujmy teraz mianownik. Z nierówności trójkąta mamy

$$\left|1+re^{it}+R^2e^{2it}\right| \geqslant \left|Re^{it}+R^2e^{2it}\right|-1 = R\cdot\left|1+Re^{it}\right|-1 \geqslant R(R-1)-1 = R^2-R-1.$$

Zatem

$$\left|\int_{\gamma_r}\frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz\right| \leqslant \frac{R\exp(-R)\pi^2}{R^2-R-1}\xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re} \int_{[-R,R]} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz = \\ &= \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_R} \frac{\exp(iz)}{1+z+z^2}\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp(\sqrt{3}/2)\cos(1/2).\end{aligned}$$

1 Rozwiązanie zadania

1.1 Część (a)

Na wstępie stwierdźmy prosty fakt - liczba pierwiastków $P(z)$ na rozpatrywanym pierścieniu jest równa liczbie pierwiastków o module mniejszym niż $3/2$, minus liczba pierwiastków o module mniejszym niż 1.
Obydwa te zbiory są obszarami ograniczonymi przez okręgi $|z| = \text{const}$, naturalnym narzędziem do znalezienia liczby miejsc zerowych więc będzie twierdzenie Rouchego. Aby z niego skorzystać, musimy najpierw postanowić jakimi funkcjami będziemy przybliżać $P(z)$ na poszczególnych okręgach.
Zacznijmy od mniejszego okręgu, $|z| = 1$. Moduł wszystkich potęg z jest tam równy 1, możemy się więc spodziewać, że nasza funkcja będzie dobrze się przybliżać przez składnik o największym współczynniku przy nim - $8z$. Sprawdzając, czy jest to słuszne założenie, faktycznie dostajemy

$$|P(z) - 8z| = |z^9 + 4z^7 - z^2 + 1| \le |z^9| + |4z^7| + |-z^2| + |1| = 1 + 4 + 1 + 1 = 7 < 8 = |8z|,$$

a zatem, na mocy twierdzenia Rouchego, $P(z)$ i $8z$ mają tyle samo pierwiastków na dysku $|z| < 1$. Jest to oczywiście tylko jeden pierwiastek.
Aby wybrać odpowiednią funkcję dla przybliżenia $P(z)$ na okręgu $|z| = 3/2$ spójrzmy ponownie na poszczególne składowe wielomianu. Gdy patrzymy na wielomian na zbiorze postaci $|z| = A > 1$, intuicja mówi nam, że wmoduł całości będzie najprawdopobniej dominowany przez wyrazy o jak najwyższych potęgach. Korzystając jednak najpierw z (mało precyzyjnego) szacowania $3/2 < 2$ widzimy, że na obecnie rozpatrywanym okręgu

$$|z^9| < |4z^7|,$$

tak więc zacznijmy od próby przybliżenia wielomianu P samym wyrazem $4z^7$. Dostajemy wtedy

$$|z^9 - z^2 + 8z + 1| \le |z^9| + |z^2| + |8z| + 1 \le |z^9| + 3 + 12 + 1 = (\frac{3}{2})^9 + 16$$

(dla wygody oszacowaliśmy tutaj $|z^2|$ z góry. Chcemy więc teraz pokazać, że

$$(\frac{3}{2})^9 + 16 < 4(\frac{3}{2})^7 = |4z^7|,$$

czyli równoważnie

$$\frac{9}{4} + \frac{2048}{3^7} < 4,$$

co jest prawdą, ponieważ $3^7 > 3^6 = 81 \cdot 81 = 6561 > 2048$, więc lewa strona nierówności jest mniejsza niż $3 + \frac{1}{4}$. Składając wszystkie pokazane nierówności, otrzymujemy ostatecznie fakt, że

$$|P(z) - 4z^7| < |4z^7|$$

na zbiorze $|z| = 3/2$, tak więc na mocy twierdzenia Rouchego, wielomian $P(z)$ ma 7 pierwiastków na dysku $|z| < 3/2$, jako że $4z^7$ ma siedmiokrotny pierwiastek w zerze.
Łącząc obydwa rezultaty, otrzymujemy, że wielomian $P(z)$ ma 6 pierwiastków na dysku $1 < |z| < 3/2$.

1.2 Część (b)

Aby wykazać tą część zadania, będziemy chcieli skorzystać z zasady argumentu. Będziemy rozpatrywać półokrąg postaci

$$\{z = 0 + iy, y \in [-R, R]\} \cup \{\Re(z) \ge 0, |z| = R\} = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

gdzie orientujemy γ_1, γ_2 tak aby obiegały ograniczony obszar zgodnie z naturalną orientacją $\mathbb{C}$ (tj. γ_1 idzie "od góry do dołu").
Ponieważ $P(z)$ jest wielomianem, to ma skończenie wiele miejsc zerowych i dla odpowiednio dużego $R \in \mathbb{R}$ wszystkie pierwiastki o części rzeczywistej dodatniej będą mieścić się wewnątrz odpowiednio dużego półokręgu.
Aby móc skorzystać z zasady argumentu, musimy pokazać, że $P(z)$ nie ma żadnych miejsc zerowych na rozpatrywanej krzywej. Zakładając, że R jest odpowiednio duże nie może być żadnych miejsc zerowych na γ_2. Dla γ_1 mamy

$$\Re(P(iy)) = y^2 + 1 > 0,$$

tak więc $P(z)$ nie może mieć miejsc zerowych na osi urojonej.
Spójrzmy teraz na przyrost argumentu wzdłuż poszczególnych krzywych:

Jak pokazaliśmy przed chwilą, obraz γ_1 zawiera się w prawej półpłaszczyźnie. Argument jest jednoznacznie określoną funkcją na tym zbiorze, tak więc przyrost argumentu P wzdłuż γ_1 jest równy po prostu

$$\arg(P(-iy)) - \arg(P(iy)),$$

gdzie arg jest funkcją przyjmującą wartości z przedziału $(-\pi, \pi)$ Mamy $P(z) = z^9[1 + \frac{4z^7}{z^9} - \frac{z^2}{z^9} + \frac{8z}{z^9} + \frac{1}{z^9}]$, a zatem, korzystając z tego że argument iloczynu to suma argumentów, wnioskujemy że

$$\arg(P(z)) - \arg(z^9) \to 0$$

przy $R \to \infty$, ponieważ argument wyrażenia w nawiasie dąży do $\arg(1) = 0$ dla $|z|$ dążącego do nieskończoności. W szczególności otrzymujemy, że

$$\arg(P(\pm iR)) - \arg((\pm iR)^9) \to 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{R\to\infty} \Delta \arg_{\gamma_1}(P(z)) = \lim_{R\to\infty}(-iR^9) - \lim_{R\to\infty}(iR^9) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Analogicznie, dla łuku γ_2 otrzymujemy

$$\lim_{R\to\infty} \Delta \arg_{\gamma_2}(P(z)) = \lim_{R\to\infty} \Delta \arg_{\gamma_2}(z^9) = \lim_{R\to\infty} \Delta 9 \arg_{\gamma_2}(z) = 9\pi.$$

Łącznie więc mamy $\Delta \arg_{\gamma_1 \cup \gamma_2}(P(z)) \to -\pi + 9\pi = 8\pi$, a zatem dla dostatecznie dużych R ten półokrąg zawiera we wnętrzu $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$ miejsca zerowe $P(z)$.

Aby pokazać, że dwa z tych miejsc zerowych leżą w pierwszej ćwiartce, pokażmy najpierw, że $P(z)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich. W tym celu należy rozpatrzeć przypadki:

- Dla $x = 0$ mamy $P(x) = 1 \neq 0$;
- Jeśli $0 < x \leq 1$, to $x^2 \leq 1$ a zatem $P(x) \geq x^9 + 4x^7 - x^2 + 8x + x^2 > 0$;
- Jeśli $1 < x$, to $x^2 < z^7$, a zatem $P(x) > x^9 + 3x^7 + x^2 - x^2 + 8x + 1 > 0$.

Teraz, ponieważ współczynniki wielomianu $P(z)$ są rzeczywiste, na mocy zasadniczego twierdzenia algebry otrzymujemy że zbiór pierwiastków $P(z)$ jest niezmienniczy ze względu na operację sprzężenia. Innymi słowy zbiór pierwiastków $P(z)$ jest symetryczny ze względu na odbicie względem osi rzeczywistej. Skoro nie ma pierwiastków leżących na tej osi, wnioskujemy że po dwa pierwiastki $P(z)$ muszą leżeć w pierwszej i czwartej ćwiartce, co kończy dowód.

Uwaga: Można też pokazać, że dwa pierwiastki leżą w pierwszej ćwiartce na inny sposób - zamiast rozpatrywać krzywą ograniczającą połowę dysku o części rzeczywistej dodatniej, można rozpatrywać krzywe ograniczające ćwiartki koła (w pierwszej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych). Ostatecznie, rozwiązania te wymagają pokazania dokładnie takich samych faktów w nieco innej kolejności - konieczne jest pokazanie, że nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich aby skorzystać z zasady argumentu dla ćwierćokręgów - tak więc wybór jednej lub drugiej metody jest tak naprawdę wyłącznie kwestią osobistych preferencji.

2 Zasady oceniania

Część (a) jest warta 4 pkt, a część (b) - 6 pkt. W ramach tych części punkty są przydzielone następująco:

Za część (a):

- Za każdy z okręgów $|z| = 1$, $|z| = 3/2$ jeden punkt za dobrą strategię (powołanie się na twierdzenie Rouchego, sensowny wybór funkcji którą przybliżamy $P(z)$;
- Za każdy z okręgów - poprawne pokazanie tezy - sprawdzenie założeń twierdzenia i udowodnienie odpowiedniej nierówności.

Za część (b):

- 1 pkt za odpowiednie podejście - powołanie się na zasadę argumentu i sensowny wybór konturów;
- 1 pkt za pokazanie, że $P(z)$ nie ma pierwiastków na osi urojonej;
- 1 pkt za poprawne policzenie zmiany argumentu wzdłuż pionowego odcinka (odcinków);
- 1 pkt za poprawne policzenie zmiany argumentu po łuku (łukach);
- 1 pkt za pokazanie, że nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich;
- 1 pkt za poskładanie tych wszystkich kroków (policzenie łącznej zmiany argumentu, uzasadnienie że są po dwa pierwiastki w pierwszej i czwartej ćwiartce).

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0,1)$.

(a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

(b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzna przeprowadzające Ω na $D(0,1)$.

Rozwiązanie:

(a) Aby wyznaczyć obraz obszaru Ω, wyznaczymy osobno obraz $\mathbb{H}_+$ oraz obraz dysku jednostkowego $D(0,1)$.

Zauważmy, że współczynniki funkcja h są rzeczywiste, zatem $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ponieważ obrazem prostej $\mathbb{R}$ będzie prosta lub okrąg. Zatem $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$ lub $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) < 0\}$. Mamy $h(i) = i$, czyli $h(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$.

Policzymy teraz obraz dysku jednostkowego. Skoro $h(-1) = \infty$, oznacza to, że obrazem $\partial D(0,1)$ będzie prosta. Aby wyznaczyć tę prostą, liczmy wartości h w innych punktach z $\partial D(0,1)$.

$$h(1) = 0, \quad h(i) = i.$$

Zatem, $h(\partial D(0,1)) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Dodatkowo, $h(0) = -1$, zatem $h(D(0,1)) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Podsumowując,

$$h(\Omega) = h(\mathbb{H}_+) \cup h(D(0,1)) = \{z \colon \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ lub } \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Alternatywnie, można było przedstawić h jako złożenie translacji, inwersji i jednokładności i wyznaczyć kolejno obrazy zbioru Ω.

(b) Wybierając gałąź funkcji argument tak, aby $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, możemy zapisać

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon \arg(z) \in (0, 3/2\pi)\}.$$

Niech f będzie gałęzią funkcji $z \mapsto z^{2/3}$ na obszarze Ω, która spełnia

$$f(z) = \exp\left(2/3 \cdot \log(z)\right),$$

gdzie $\log(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$. Funkcja f jest dobrze określona i holomorficzna na Ω. Dodatkowo, mamy $f(\Omega) = \mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon \arg(z) \in (0, \pi)\}$.

Rozważmy teraz homografią $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Wówczas $g(\mathbb{H}_+) = D(0,1)$. Zatem $(g \circ f)(\Omega) = D(0,1)$. Dodatkowo, oba odwzorowania są biholomorficzne, tzn. każde z nich jest jest holomorficznym homeomorfizmem, którego odwrotność też jest odwzorowaniem holomorficznym.

Funkcje analityczne, Egzamin 1, 2022/23.

Zadanie 4:

a) Zastosujemy tw. Rouchy'ego.

Mamy dla $z \in \partial D(0,1)$: $|\xi| < C$

$$|-\xi f(z)| \leq |\xi| \underbrace{\sup_{z \in \partial D(0,1)} |f(z)|}_{=:M} \leq CM < 1 = |z|$$

Np dla $C := \frac{1}{M+1}$

Stąd funkcje $h(z) = z$, oraz $g(z) = z - \xi f(z)$ mają wewnątrz dysku $D(0,1)$ tyle samo zer, czyli 1.

b) Rozważmy $F(z) = z - \xi f(z)$, gdzie $|\xi| < C$, C - z punktu a).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} \, dz =: I$$

gdzie przyjmujemy dodatnią orientację $\partial D(0,1)$.

Funkcja $G(z) := \frac{zF'(z)}{F(z)}$ - ma w $z_0(\xi)$ $\Big\{$ takim, że $z_0(\xi) = \xi f(z_0(\xi))$

biegun rzędu 1, zatem

$$I = \operatorname{res}\left(G(z), z_0(\xi)\right) = \lim_{z \to z_0(\xi)} \frac{(z - z_0(\xi)) \cdot z\,(F'(z))}{F(z)} =$$

$$= \lim_{z \to z_0(\xi)} \frac{z\,(1 - \xi f'(z))}{\underbrace{\dfrac{F(z) - \underbrace{\boxed{F(z_0(\xi))}}_{=0}}{z - z_0(\xi)}}_{\to F'(z_0(\xi))}} = z_0(\xi) \cdot \frac{F'(z_0(\xi))}{F'(z_0(\xi))} = z_0(\xi).$$

Obliczymy I innym sposobem.

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = \frac{z F'(z)}{z - \xi f(z)} = F'(z) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi f(z)}{z}} = \circledast$$

Na $\partial D(0,1)$: $|z| = 1$ $\quad \left|\frac{\xi f(z)}{z}\right| = |\xi f(z)| < c \cdot \sup_{D(0,1)} |f| < 1$

z rachunków w części a)

$$\Rightarrow \circledast = F'(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (f(z))^n}{z^n} = (1 - \xi f'(z)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (f(z))^n}{z^n} =$$

$$= (1 - \xi f'(z)) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \xi f'(z)) \frac{\xi^n (f(z))^n}{z^n} =$$

Stąd

$$I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} (1 - \xi f'(z))\,dz}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{(1 - \xi f'(z))\, \xi^n (f(z))^n}{z^n}\,dz$$

$=0$ bo całkujemy funkcję holomorficzną

$$= \sum_{n \geq 1} \xi^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{g_n(z)}{z^n}\,dz$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big|_{z=0} g_n(z)$$

$\leftarrow$ stąd teza. Przedstawiamy rozwiązanie w rozszerzonej wersji

– nie wymagane.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\xi^n (f(z))^n}{z^n}\, dz - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{\xi^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)} \left[(f(z))^{n+1}\right]'}{z^n}$$

$$\underset{\text{wzór Cauchy'ego}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(f(z))^n \right] \Big|_{z=0}}_{C_n} - \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)(n-1)!} \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left((f(z))^{n+1}\right)' \right]}_{= \frac{d^n}{dz^n} \left((f(z))^{n+1} \right) \Big|_{z=0} = C_{n+1}}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \cdot C_n - \sum_{n \geq 1} \frac{\xi^{n+1}}{n!} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot C_{n+1} =$$

$n' := n+1$

$$= \underbrace{\frac{\xi^1}{1} C_1}_{n=1} + \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n C_n}{(n-1)!} - \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \left(\frac{n-1}{n} \right) C_n \right.$$

$$= \xi \cdot C_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \underbrace{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}_{\frac{1}{n}} \cdot C_n =$$

$$= \frac{\xi^1}{1!} C_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{\xi^n}{n!} \cdot C_n = \boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big|_{z=0} \left(f(z) \right)^n}$$

Zatem też można było sformułować tak że w wersji rozszerzonej $\boxed{}$.

$\square$

Kryteria ocen: Za część a) i b) można dostać maksymalnie po 5 pt. Odliczanie punktów następowało z powodu błędów lub nie dokończonych rachunków.

W przypadku oceny za punkt b):

- za prawidłowy rachunek: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = z_0$ –

  – dostawało się 2,5 pt

- za dowód tożsamości: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = \sum_{n\geq 1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big|_{z=0} \left[g_n(z) \right].$

  – dostawało się 2,5 pt.

A. Kołomańska

Na temat zadania 5/10.II.2023

część (a)	3p.
część (b)	1p.
część (c)	4p.
część (d)	2p.

(a) Za R_0 można przyjąć większy z modułów pierwiastków wielomianu $f(z) = z^2 + 6z + 1$, $z_1 = -3-\sqrt{8}$, $z_2 = -3+\sqrt{8}$, $R_0 = |z_1| = 3+\sqrt{8}$.

Bowiem dla $|z| > 3+\sqrt{8}$, tzn. dla $\left|-\frac{z_1}{z}\right|, \left|-\frac{z_2}{z}\right| < 1$ mamy funkcje holomorficzne na Ω_{R_0} oznaczone $\left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{z_1}{z}\right)^n$ oraz $\left(1-\frac{z_2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{z_2}{z}\right)^n$. Te szeregi są bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżne na Ω_{R_0} — wyrażają jednoznacznie wyznaczone funkcje holomorficzne na Ω_{R_0} (por. Leja, strona 102).

Skoro $f(z) = (z-z_1)(z-z_2) = z^2\left(1-\frac{z_1}{z}\right)\left(1-\frac{z_2}{z}\right)$, dostajemy dwie rozłączne w wartościach holomorficzne (a nie tylko ciągłe) gałęzie dla $\sqrt{f(z)}$: $g_1(z) = -z\left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z_2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$ oraz $g_2(z) = z\left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z_2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Niech $g(z) := g_2(z)$, bo $g_2(2R_0) =$ arytmetyczny $\sqrt[2]{}(105+36\sqrt{8}) > 0$.

Teraz $h(z) = \frac{g(z)}{z} = \left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z_2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[z\to\infty]{} 1\cdot 1 = 1$, więc funkcja h ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.

(c) Funkcja h regularna w ∞ zapisuje się jako $h(z) = b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \ldots$, więc gałąź g zapisuje się jako $g(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$ ($a_k = b_{k-1}$). Jest to jej szereg Laurenta w jej dziedzinie Ω_{R_0}.

Konkretnie $g(z) = z\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{z_1}{z}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{z_1}{z}\right)^2 + \ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{z_2}{z}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{z_2}{z}\right)^2 + \ldots\right)$

$= z + \frac{1}{2}(-z_1-z_2) + \left(\frac{1}{4}(-z_1)(-z_2) - \frac{1}{8}\left((-z_1)^2+(-z_2)^2\right)\right)\frac{1}{z} + \ldots$

$= z + 3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdot 34\right)\frac{1}{z} + \ldots = z + 3 - \frac{4}{z} + \ldots$

(szeregi Newtona są bezwzględnie zbieżne, więc tu tw. Abela), czyli $a_1 = 1$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = -4$.

(d) Wartość całki $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\partial D(0,2R_0)} g(z)\,dz$ wynosi $-a_{-1} = -(-4) = 4$ (Leja, strona 136), zatem $\int_{\partial D(0,2R_0)} g(z)\,dz = -2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\partial D(0,2R_0)} g(z)\,dz\right) = -8\pi i$.

EGZAMIN FAN

Gabriel Kiciński gr. p. Mańkiewicza

429155

10

Zad. 6. (a) Oznaczmy $h(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \bar{z}_1 z}$ - jest to automorfizm dysku (wykład) (Ale tylko gdy $|z_1|<1$.)

także $h^{-1}(z)$ jest automorfizmem dysku

~~Rozpatrzmy $h(f(h^{-1}(z)))$. Widzimy, że $h(f(h^{-1}(0))) = h(f(z_1))$~~

Oznaczmy $h_2(z) = \frac{f(z_1) - f(z)}{1 - \bar{f}(z_1) f(z)}$ $\left(\text{też} \in H(D(0,1)) \quad D(0,1) \to D(0,1)\right)$

z zamiast $f(z)$ ($\times 2$).

Rozpatrzmy $H(z) = h_2(f(h^{-1}(z)))$ dla $z=0$ $h^{-1}(0) = z_1$, $h(f(z_1)) = 0$

$|H(z)| < 1$, $H \in H(D(0,1))$. Spełnione są założenia lematu Schwarza. Zatem mamy $|H(z)| \leq z$ $(\forall z \in \mathbb{D})$

$$\left| \frac{f(z_1) - f(h^{-1}(z))}{1 - \bar{f}(z_1) f(h^{-1}(z))} \right| \leq |z|$$

podstawiając $z = \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ otrzymujemy tezę (a)

$= h(z)$, więc $\in \mathbb{D}$.

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \bar{f}(z_1) f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

z_2 możemy wziąć dowolne z $D(0,1)$

z_1 ustaliliśmy na początku, ale też dowolnie.

6(b) z podpunktu (a) dla $z_1 \neq z_2$ zachodzi

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \cdot \frac{1}{\left|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)\right|} \leq \frac{1}{\left|1-\overline{z}_1 z_2\right|}$$

przechodząc z $z_2 \to z_1$ otrzymujemy

$$\left|f'(z_1)\right| \cdot \frac{1}{\left|1-\overline{f(z_1)}\cdot f(z_1)\right|} \leq \frac{1}{\left|1-\overline{z}_1 z_1\right|}$$

$z = z_1$

A nawet wyrażenia pod modułami w mianownikach są ≥ 0 (z tego samego powodu).

$$\frac{|f'(z)|}{\left|1-|f(z)|^2\right|} \leq \frac{1}{\left|1-|z|^2\right|}$$

w przejściu do granicy mianowniki niezerowe, bo

$z \in D(0,1)$

$f(z) \in D(0,1)$

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

$f \in H(D(0,1))$, więc pochodna istnieje.